

16/3/17

Την προηγούμενη φορά είπαμε:

Εσωτερικό γινόμενο:

Ορισμός:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{αν } \vec{a} = \vec{0} \text{ ή } \vec{b} = \vec{0} \\ |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\angle \vec{a}, \vec{b}) & \text{αν } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ και } \vec{b} \neq \vec{0} \end{cases}$$

Πρόταση: Αν $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ορθοκανονική βάση και $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = (a_1, a_2, a_3)$
 $\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3 = (b_1, b_2, b_3)$
 τότε $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Παρατήρηση:

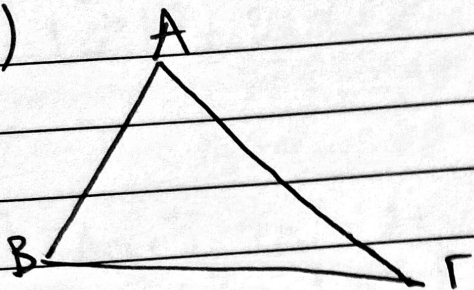
$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = \vec{0} \text{ ή } \vec{b} = \vec{0} \\ \text{ή} \\ (\vec{a}, \vec{b}) = \pi/2 \text{ όταν } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ και } \vec{b} \neq \vec{0} \end{cases}$$

Ιδιότητες εσω. γινομένου.

- α) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$
- β) $\langle \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2, \vec{b} \rangle = \lambda_1 \langle \vec{a}_1, \vec{b} \rangle + \lambda_2 \langle \vec{a}_2, \vec{b} \rangle$
- γ) $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = |\vec{a}|^2 \geq 0$, $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$
- δ) $|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$
- ε) $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$
- ζ) $|\vec{a} \pm \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \pm 2 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$
- η) $\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$

Εφαρμογές

1)



$$\vec{A\Gamma} = \vec{AB} + \vec{B\Gamma}$$

$$|\vec{A\Gamma}|^2 = |\vec{AB} + \vec{B\Gamma}|^2$$

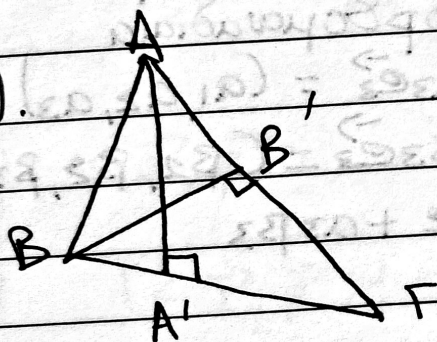
$$= |\vec{AB}|^2 + |\vec{B\Gamma}|^2 + 2\langle \vec{AB}, \vec{B\Gamma} \rangle$$

$$= |\vec{AB}|^2 + |\vec{B\Gamma}|^2 - 2\langle \vec{BA}, \vec{B\Gamma} \rangle$$

$$|\vec{A\Gamma}|^2 = |\vec{AB}|^2 + |\vec{B\Gamma}|^2 - 2|\vec{AB}||\vec{B\Gamma}|\cos \hat{B}$$

Νόμος συνωστήμω.

2).



AA', BB' ύψη του

$\triangle ABC$ που τέμνονται στο O

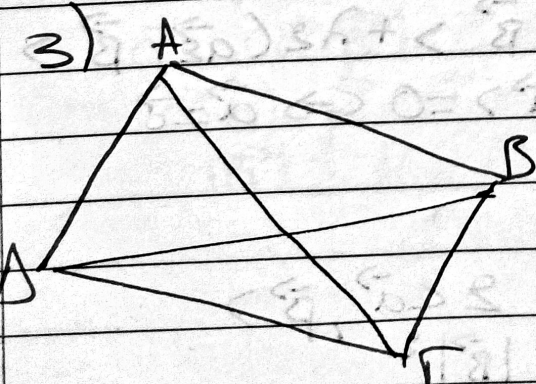
$$\langle \vec{OA}, \vec{B\Gamma} \rangle = 0, \langle \vec{OB}, \vec{A\Gamma} \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\langle \vec{OA}, \vec{O\Gamma} - \vec{OB} \rangle = 0$$

$$\text{και } \langle \vec{OB}, \vec{O\Gamma} - \vec{OA} \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \vec{OA}, \vec{O\Gamma} \rangle - \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle = 0 \\ \langle \vec{OB}, \vec{O\Gamma} \rangle - \langle \vec{OB}, \vec{OA} \rangle = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \langle \vec{OA}, \vec{O\Gamma} \rangle - \langle \vec{OB}, \vec{O\Gamma} \rangle = 0 \\ \Rightarrow \langle \vec{OA} - \vec{OB}, \vec{O\Gamma} \rangle = 0 \\ \Rightarrow \langle \vec{BA}, \vec{O\Gamma} \rangle = 0 \end{array}$$

3)



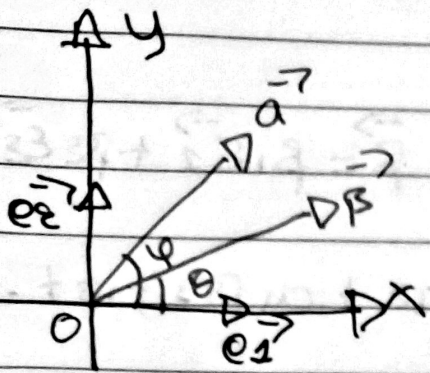
Έστω $ABCD$ παραλλ.

$$\langle \vec{A\Gamma}, \vec{DB} \rangle = \langle \vec{AB} + \vec{B\Gamma}, \vec{AB} - \vec{AD} \rangle =$$

$$\langle \vec{AB} + \vec{B\Gamma}, \vec{AB} - \vec{B\Gamma} \rangle =$$

$$= |\vec{AB}|^2 - |\vec{B\Gamma}|^2$$

4) Για διανύσματα του επιπέδου (Επιπεδομετρία) $\{e_1, e_2\}$ ορθοκανονική βάση.



$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 = (a_1, a_2) \\ \vec{b} &= b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 = (b_1, b_2) \\ \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \end{aligned}$$

Θεωρώ τα διανύσματα
 $\vec{a} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ και
 $\vec{b} = (\cos \theta, \sin \theta)$

$$\cos(\angle(\vec{a}, \vec{e}_1)) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{e}_1 \rangle}{|\vec{a}| |\vec{e}_1|} = \cos \varphi$$

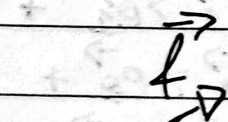
$$(\angle(\vec{a}, \vec{e}_1)) = \varphi, \quad (\angle(\vec{b}, \vec{e}_1)) = \theta$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) \\ &= \cos(\varphi - \theta) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos(\varphi - \theta) = \cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta$$

5)



Έργο και παραμέτρους είναι
 $|\vec{f}| \text{ pr}_{\vec{AB}} \vec{f} = \langle \vec{f}, \vec{AB} \rangle$

Τότε για
 $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

Πρόταση: Έστω $\{e_1, e_2, e_3\}$ ορθοκ. βάση

Τότε για κάθε διάνυσμα $\vec{a}$ ισχύει

$$\vec{a} = \langle \vec{a}, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{a}, \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2 + \langle \vec{a}, \vec{e}_3 \rangle \vec{e}_3$$

$$\text{Απόδειξη: } \vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3, \quad \langle \vec{a}, \vec{e}_1 \rangle =$$

$$\begin{aligned} &= \langle \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3, \vec{e}_1 \rangle = \lambda_1 \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle + \lambda_2 \langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle \\ &+ \lambda_3 \langle \vec{e}_3, \vec{e}_1 \rangle = \lambda_1 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε:

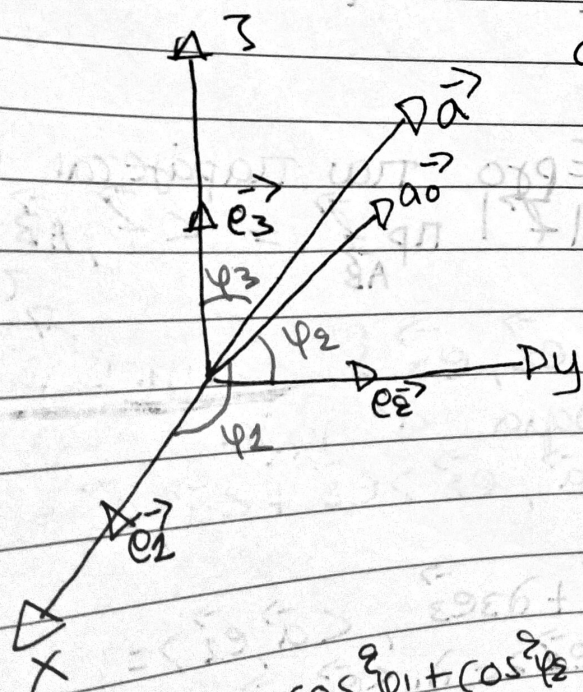
Έστω $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ τυχαία βάση. Θέτω
 $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3, \quad \vec{b} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle &= a_1 \beta_1 \delta_{11} + a_1 \beta_2 \delta_{12} + a_1 \beta_3 \delta_{13} + \dots = \\ &= \sum_{i,j=1}^3 a_i \beta_j \delta_{ij} \end{aligned}$$

Συμπέρασμα: Εφραζόμαστε με ορθοκανονικές βάσεις.

$$\vec{a} \neq \vec{0} \quad a_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}, \quad |\vec{a}_0| = 1$$



$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ορθοκ. βάση

$$\begin{aligned} \vec{a}_0 &= \langle \vec{a}_0, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 + \\ &\quad \langle \vec{a}_0, \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2 + \\ &\quad \langle \vec{a}_0, \vec{e}_3 \rangle \vec{e}_3 = \\ &= |\vec{a}_0| |\vec{e}_1| \cos(\angle(\vec{a}_0, \vec{e}_1)) \vec{e}_1 + \\ &\quad + \cos(\angle(\vec{a}_0, \vec{e}_2)) \vec{e}_2 + \\ &\quad + \cos(\angle(\vec{a}_0, \vec{e}_3)) \vec{e}_3 \end{aligned}$$

$$\vec{a}_0 = (\cos \varphi_1) \vec{e}_1 + (\cos \varphi_2) \vec{e}_2 + (\cos \varphi_3) \vec{e}_3$$

$$\vec{a}_0 = (\cos \varphi_1, \cos \varphi_2, \cos \varphi_3)$$

$$\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 = 1$$

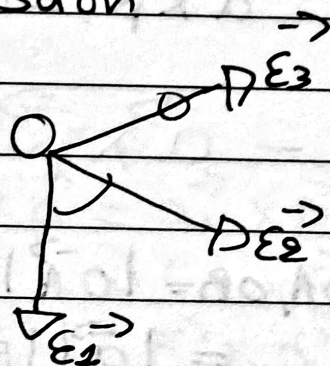
$$\vec{a} = |\vec{a}| (\cos \varphi_1, \cos \varphi_2, \cos \varphi_3)$$

οριζόντια κατεύθυνση του $\vec{a}$

(εσ. γινόμενο και για επίπεδο και για σφαίρα
Ενώ εζ. γιν. μόνο για σφαίρα, για χώρο).

Δεξιόστροφες Βάσεις

~~Εσ.~~
 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ βάση



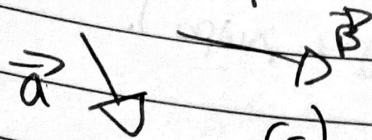
Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Ορισμός: Κατάμε εζ. γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$ (του χώρου σφαιρομετρία) (συμβολίζεται με $\vec{a} \times \vec{b}$) το διάνυσμα $\vec{a} \times \vec{b}$ να έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.

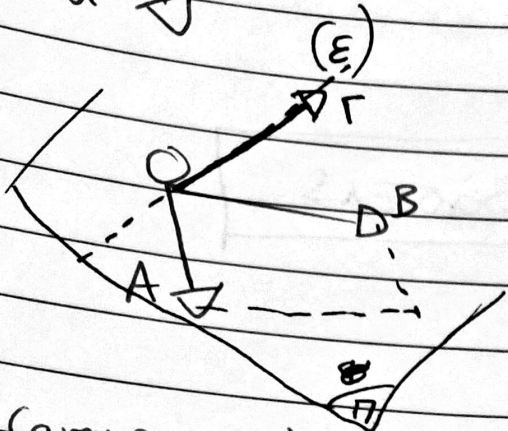
- α) Αν $\vec{a} = \vec{0}$ ή $\vec{b} = \vec{0}$ τότε $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
- β) Αν $\vec{a} \neq \vec{0}$ και $\vec{b} \neq \vec{0}$ τότε $\vec{a} \times \vec{b}$ έχει μήκος: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$

Διεύθυνση: Το $\vec{a} \times \vec{b}$ είναι ορθόγωνιο προς τα $\vec{a}, \vec{b}$
Υπό: $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ δεξιόστροφη βάση (αν είναι βάση)

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ. (ii)



$$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$$



Πάω να
αχεδιάσω Εξ. 4.4.

$$(\epsilon) \perp OA, (\epsilon) \perp OB \Rightarrow (\epsilon) \perp (n)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

(αντιστροφή)

ΙΔΙΟΤΗΤΑ

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$$

Εμβαδό παρ/μο με $OA, OB = |\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}| \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$
 $= |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$

Άρα το εμβαδό του παρ/μο είναι
το μήκος του Εξ. 4.4.

Πρόταση: Τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι Γ.Ε
αν-ν $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

Πόρισμα: Τα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι Γ. ανεξάρτητα
αν-ν $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$.

Πρόταση: Έστω $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ορθοκανονική
βάση $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = (a_1, a_2, a_3)$
 $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

Τότε ισχύει $\vec{a} \times \vec{b} =$

$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
a_1	a_2	a_3
b_1	b_2	b_3

=

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \right)$$

Διότι τες τα εχ. γινόμενα

$$a) \vec{\beta} \times \vec{a} = - \vec{a} \times \vec{\beta}$$

$$(\vec{a} \times \vec{\beta})$$

$$b) (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) \times \vec{\beta} = a_1 \vec{e}_1 \times \vec{\beta} + a_2 \vec{e}_2 \times \vec{\beta}$$

$$c) (\lambda \vec{a}) \times \vec{\beta} = \lambda (\vec{a} \times \vec{\beta})$$

$$d) \vec{a} \times (\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2) = \vec{a} \times \vec{\beta}_1 + \vec{a} \times \vec{\beta}_2$$

$$e) \vec{a} \times (\mu \vec{\beta}) = \mu (\vec{a} \times \vec{\beta})$$

$$3) (\vec{a} \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma} = \langle \vec{a}, \vec{\gamma} \rangle \vec{\beta} - \langle \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle \vec{a}$$

$$\vec{a} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) = \langle \vec{a}, \vec{\gamma} \rangle \vec{\beta} - \langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle \vec{\gamma}$$